1. Отыскать связь между элементами следующих матриц и членами последовательности Фибоначчи f_k:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \text{ (вариант 1) и } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \text{ (вариант 2).}$$

Используя найденную связь, доказать, что $f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^k$.

2. Рассмотреть блочную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} \text{ и } A_{22} \text{ – матрицы порядка } m \text{ и } n.$$

Доказать следующие равенства, представив блочные матрицы в их левых частях в виде произведения матрицы A и другой блочной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} DA_{11} & DA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = |D||A|, \quad D \text{ – матрица (вариант 1),}$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + BA_{11} & A_{22} + BA_{12} \end{pmatrix} = |A|, \quad B \text{ – матрица (вариант 2).}$$

3. Вычислив следующий определитель двумя способами:

$$\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{pmatrix},$$

доказать тождество Лагранжа:

$$(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Используя тождество Лагранжа, доказать неравенство Коши-Буняковского и указать необходимое и достаточное условие достижения равенства:

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geqslant (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2.$$

4. Выписать матрицу Лапласа L, элементы которой определены ниже, для следующего простого графа:

(вариант 1), (вариант 2).

$L_{ii} =$ число рёбер вершины i,

$L_{ij} = -1$, если существует ребро между вершиной i и вершиной j,

$L_{ij} = 0$, если не существует ребра между вершиной i и вершиной j.

Является ли выписанная матрица L симметричной? Является ли выписанная матрица L невырожденной?

Доказать, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы L равны между собой (воспользоваться присоединённой матрицей).

5. Применяя метод выделения линейных множителей, решить уравнение $|A - \lambda I| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ (вариант 1)},$$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -6 & -4 \end{pmatrix} \text{ (вариант 2)}.$$

6. Отыскать общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 6 & -3 \\ -16 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{(вариант 1)},$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & 10 \\ 2 & -4 & -14 & 20 \\ 1 & -2 & -7 & 10 \\ 7 & 6 & 11 & -20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{(вариант 2)}.$$

7. Построить систему линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, частным решением которой является вектор w, а в фундаментальную систему решений системы $Ax = 0$ входят векторы v_1, v_2:

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{(вариант 1)},$$
$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{(вариант 2)}.$$